Charlier, Carl Vilhelm
Ludwig
Partikulare Integrale des
Rotationsproblems

J. Brandt

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:o 12.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

ARTIKULARE INTEGRALE DES ROTATIONSPROBLEMS

VON

C. V. L. CHARLIER

MIT 1 TEXTFIGUR

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ATRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 12.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 32

Partikulare Integrale des Rotationsproblems.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mit 1 Textfigur.

Mitgeteilt am 13. November 1907.

Wird die Rotation eines festen Körpers durch einen Körper gestört, der sich in einer Ebene bewegt, so wird diese Ebene zweckmässig als XY-Ebene gewählt. Der Ausdruck für das Potential vereinfacht sich dabei, indem alle mit dem Sinus der Breite des störenden Körpers multiplizierten Glieder verschwinden. Diese Vereinfachung ist erlaubt so oft es sich um die Störungen der Sonne auf die Rotation der Planeten handelt, und ich werde deswegen dies Problem kurz als das *planetarische Rotationsproblem* bezeichnen.

Das planetarische Rotationsproblem besitzt einige partikuläre Integrale, die ich hier untersuchen will. Ich bediene mich der Veränderlichen ξ_1, η_1, u, v, p, q, die ich an anderer Stelle definiere.[1] Die Störungsfunktion ist nach Potenzen von u, v, p, q entwickelt. Wird mit $P_r(u, v, p, q)$ oder kurz P_r eine Potenzreihe in u, v, p, q bezeichnet, in welcher die Summe der Exponenten der niedrigsten Dimensionen in der Potenzreihe gleich r ist, so kann man die charakteristische

[1] »Entwickelung des Potentials im Rotationsproblem.» Ich werde im Folgenden diesen Aufsatz mit Meddel. n:o 33 bezeichnen.

Funktion H' in der Form

$$(1)\quad \begin{cases} H' = \dfrac{\xi_1^2}{2C} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu}{r^3}\left[k_1 A \cos^2 \eta_1 + k_2 B \sin^2 \eta_1\right] - \\ \qquad - \xi_1 \dfrac{d\lambda}{dt} + P_2(u, v, p, q) \end{cases}$$

schreiben.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind (Medc
N:o 33)

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial \eta_1}, & \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial v}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial u}, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial q}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial p}. \end{cases}$$

Es erhellt aus diesen Gleichungen und aus der obi
Form für H', dass das planetarische Rotationsproblem
partikularen Lösungen

$$(3)\quad u = v = p = q = 0$$

hat, wenn nämlich ξ_1 und η_1 aus den ersten Gleichungen
bestimmt werden. Wir setzen zur Abkürzung

$$(4)\quad F_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} - \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}\left[k_1 A \cos^2 \eta_1 + k_2 B \sin^2 \eta_1\right] - \xi_1 \frac{d\lambda}{dt},$$

so dass

$$H' = F_0 + P_2(u, v, p, q)$$

ist.

Dann ist

$$(5)\quad \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial \xi_1}.$$

Führt man die Differentiationen aus, so lauten di
Gleichungen, wenn man beachtet, dass

$$k_1 A - k_2 B = B - A$$

ist,

$$(5^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu}{r^3}(B-A)\,2\cos\eta_1\sin\eta_1\,, \\[2ex] \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\xi_1}{C} + \dfrac{d\lambda}{dt}\,. \end{cases}$$

Die Länge λ und der Radius Vector r des störenden Planeten sind gewisse Funktionen der Zeit, die wir im allgemeinen als bekannt voraussetzen können. Wir fangen mit dem einfachsten Fall an, dass nämlich der störende Körper sich in einem Kreis um den rotierenden Körper bewegt. Bezeichnen wir die mittlere Bewegung des störenden Körpers mit n, so hat man dann

$$(6)\qquad \frac{d\lambda}{dt} = n\,; \quad \frac{\mu}{r^3} = n^2 \frac{\mu}{\mu + \mu_1}\,,$$

wo μ_1 die Masse des rotierenden Körpers bezeichnet. Wir setzen

$$(7)\qquad \nu^2 = 3\,\frac{\mu}{r^3}\,\frac{B-A}{C}\,.$$

Die Grösse ν ist also eine Konstante, wenn der störende Körper sich in einem Kreis bewegt. Die Gleichungen (5*) lauten dann

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = C\,\nu^2\cos\eta_1\sin\eta_1\,, \\[2ex] \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\xi_1}{C} + n\,. \end{cases}$$

Hier findet man unmittelbar die beiden partikularen Lösungen

$$\eta_1 = 0, \qquad \xi_1 = Cn,$$
$$\text{und} \quad \eta_1 = \pm 90°, \quad \xi_1 = Cn.$$

Bewegt sich der störende Körper in einem Kreis, hat also das planetarische Rotationsproblem die partikularen Integrale $u = v = p = q = 0$, $\xi_1 = Cn$ *und* $\eta_1 = 0$ *oder* $\eta_1 = \pm 90°$.

Die mechanische Bedeutung dieser Lösungen sind leicht zu finden. Da $u = v = p = q = 0$ ist, so ist θ_0 und ε auch gleich Null, so dass *die Rotationsachse mit der Achse des Trägheitsmomentes C zusammenfällt.*

Was η_1 betrifft, so hat man nach der Definition (Meddel. 33)

$$\eta = u_1 + u_2 - u_3 + \lambda .$$

Wenn die drei Achsen Z, z und Z_0 zusammenfallen, so ist (Meddel. 31, Fig. 1)

$$u_2 = 180^\circ, \quad u_1 - u_3 = 180^\circ + xX,$$

so dass

$$\eta_1 = \lambda - Xx$$

Die Grösse η_1 bezeichnet also hier den Unterschied zwischen der Länge der Planeten und der Länge der Trägheitsachse x in der XY-Ebene. (Die Trägheitsachse x entspricht dem Trägheitsmoment A).

Die beiden Lösungen $\eta_1 = 0$ und $\eta_1 = 90^\circ$ bedeuten also mechanisch, dass die kleinste bezw. die mittlere Trägheitsachse gegen den störenden Körper gerichtet sind. Man hat es mit sog. *gebundener* Rotation zu tun.

Diese partikularen Integrale sind indessen nur Spezialfälle der allgemeinen Lösungen der Gleichungen (8), die leicht zu finden sind. Wird nämlich die zweite Gleichung (8) differentiiert, so erhält man für η_1 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = - \nu^2 \cos \eta_1 \sin \eta_1 .$$

Diese gibt

$$\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2 = E - \nu^2 \sin^2 \eta_1 ,$$

wo E eine Integrationskonstante bezeichnet.

Das Integral dieser Gleichung ist verschieden je nachdem der Wert von E grösser oder kleiner als ν^2 ist. Ist

$$1) \qquad E > \nu^2$$

so ist die Lösung

$$(9) \qquad \eta_1 = am\,(\sqrt{E}\,t + \gamma), \text{ Mod. } \frac{\nu}{\sqrt{E}} .$$

Ist dagegen

$$2) \qquad E < \nu^2,$$

so erhält man eine reelle Lösung von der Form

$$(10) \qquad \sin \eta_1 = \frac{\sqrt{E}}{\nu}\, sn\,(\nu t + \gamma)\,; \ \text{Mod.}\, \frac{\sqrt{E}}{\nu} \cdot$$

Im letzteren Falle haben wir also *Libration* in η_1 um den Wert Null. Der Maximalwert von η_1 ist durch die Relation

$$\sin \eta_1 = \frac{\sqrt{E}}{\nu}$$

gegeben. Die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes schwankt periodisch um den Radius Vector des störenden Körpers ganz in derselben Weise — und nach ähnlichen Gesetzen — wie das einfache Pendel um die Lotlinie. Beispiele in der Natur dieser Art sind die Libration des Mondes und, nach SCHIAPARELLI, die Rotation des Mercurs und der Venus.

Ist $E = \nu^2$ so findet *Limitation* statt. Man hat in der Tat dann, wie aus (9) oder (10) hervorgeht,

$$\sin \eta_1 = \frac{e^{\nu t + \gamma} - e^{-\nu t - \gamma}}{e^{\nu t + \gamma} + e^{-\nu t - \gamma}} \cdot$$

Geht t gegen $+\infty$, geht $\sin \eta_1$ gegen die Einheit, und also η_1 gegen 90°. Die mittlere Trägheitsachse nähert sich asymptotisch dem Radius Vector des störenden Körpers. Dies entspricht der partikularen Lösung $\eta_1 = 90°$.

Es erhellt aus den obigen Ausdrücken unmittelbar, dass die Libration um $\eta_1 = 0$ *stabil*, um $\eta_1 = 90°$ dagegen *unstabil* ist.

Ist $E > \nu^2$ so wächst η_1 mit der Zeit ins Unendliche.

Wird η_1 in eine FOURIER'sche Reihe entwickelt, so erhält man für

$$1) \qquad E > \nu^2$$

$$\eta_1 = \frac{\pi(\sqrt{E}t + \gamma)}{2R} + 2\sum{}' \frac{1}{s}\, \frac{q^s}{1 + q^{2s}} \sin \frac{3\pi(\sqrt{E}t + \gamma)}{R} \cdot$$

Ist dagegen

$$2)\qquad E < \nu^2$$

so erhält man

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \sqrt{E}\, cn\,(\nu t + \gamma)$$

und hinaus

$$\eta_1 = \frac{4}{k} \sum \frac{1}{2s-1} \frac{\sqrt{q^{2s-1}}}{1+q^{2s-1}} \sin \frac{(2s-1)\pi(\nu t + \gamma)}{2R} .$$

Ein charakteristischer Unterschied zwischen den beiden Lösungen verdient besonders hervorgehoben zu werden. Er betrifft die Grösse der Periode der Schwankungen. Ist nämlich

$$1)\qquad E > \nu^2$$

so erhält die *Schwankungsperiode* den Wert

$$\frac{2K}{\sqrt{E}}$$

und für

$$2)\qquad E < \nu^2$$

den Wert

$$\frac{4K}{\nu} .$$

Für sehr hohe Werte der Integrationskonstante E hat mithin die Schwankungsperiode genähert den Wert

$$\frac{\pi}{\sqrt{E}}$$

und *für sehr kleine Werte* dieser Integrationskonstante hat sie genähert den Wert

$$\frac{2\pi}{\nu} .$$

Im vorigen Falle nähert sich die Schwankungsperiode dem Werte Null, im letzteren Falle dem Werte $2\pi : \nu$, der vom Unterschied der Trägheitsmomente B und A abhängig ist. Diesen Grenzwert der Schwankungsperiode können wir in der Form

$$2T : \sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$$

schreiben, wenn $2T$ die Umlaufszeit des störenden Körpers bezeichnet.

Der Minimalwert von $(B-A):C$ ist Null (Rotationskörper um die grösste Trägheitsachse rotierend), der Maximalwert ist Eins (fadenförmiger Körper). *Die Schwankungsperiode ist also grösser als*

$$\frac{2T}{\sqrt{3}} = 0.577 \times 2T.$$

Nachdem η_1 gefunden worden ist, erhält man ξ_1 aus einer der Gleichungen (8). Aus

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C\nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1$$

erhält man für

1) $\quad E > \nu^2$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C\nu^2 cn(\sqrt{E}\,t+\gamma)\, sn(\sqrt{E}\,t+\gamma)$$

also

$$\xi_1 = -C\sqrt{E}\, dn(\sqrt{E}\,t+\gamma) + \text{Konstante},$$

wo die Konstante nach der zweiten Gleichung (8) den Wert Cn hat. Ist

2) $\quad E < \nu^2$

so erhält man

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C\nu\sqrt{E}\, dn(\nu t+\gamma)\, sn(\nu t+\gamma)$$

und

$$\xi_1 = -C\sqrt{E}\, cn(\nu t+\gamma) + \text{Konstante},$$

wo die Konstante wieder den Wert Cn hat.

Wir haben bis jetzt angenommen, dass der störende Körper sich um den rotierenden Körper in einem Kreis bewegt. Ist dies nicht der Fall, so kompliziert sich die Aufgabe. Die Differentialgleichung für η_1 hat dann die Form

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1 = \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \tag{11}$$

und hier sind sowohl ν^2 wie λ Funktionen der Zeit.

Indem ich in der ersten Linie den Librationsfall vor Augen habe, so ist ersichtlich, dass die Veränderungen von ν^2, welche von Veränderungen im Radius Vector herrühren, von geringerem Einfluss sind, als die Veränderungen in λ. Die Veränderungen in ν^2 sind nämlich mit der als klein angenommenen Grösse $\sin\eta_1$ multipliziert. Wird für λ die Form

$$\lambda = nt + c_0 + \Sigma A \cos(bt + c)$$

angenommen, so kann man in vielen Fällen die Differentialgleichung (11) auf die lineare Form

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu^2\eta_1 = -\Sigma b^2 A \cos(bt + c)$$

bringen, und das Integral lautet dann

$$\eta_1 = A_0 \cos(\nu t + B_0) + \sum \frac{b^2 A}{b^2 - \nu^2} \cos(bt + c), \tag{12}$$

wo A_0 und B_0 die Integrationskonstanten bezeichnen.

Diese Formel gibt eine gute Annäherung zum gesuchten Integral so oft keine von den Grössen b genähert gleich ν sind. In letzterem Fall entstehen aber Schwierigkeiten, die man bis jetzt nicht genügend untersucht hat. Die Untersuchungen, die mir bekannt sind, geben wenigstens keinen Aufschluss über das Verhalten des Integrales für solche Werte des Parameters ν^2, die in der Nähe des Wertes $\nu^2 = b^2$ liegen.

Ich nehme an, dass es sich um die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu^2 \cos\eta_1 \sin\eta_1 = -b^2 A \cos bt \tag{13}$$

handelt, so dass nur ein Glied in λ mitgenommen wird.

Zu dieser Gleichung existiert immer ein partikulares Integral mit der Periode $2\pi : b$. Ich will dies Integral näher in Betracht ziehen. Ich setze also

$$\eta_1 = \alpha_1 \cos bt + \alpha_3 \cos 3\,bt + \alpha_5 \cos 5\,bt + \cdots \tag{13*}$$

und suche die Koeffizienten α_1, α_3, α_5 u. s. w. durch Rekursionsformeln zu bestimmen. Man hat

$$\cos \eta \sin \eta_1 = \frac{1}{2} \sin 2\,\eta_1 = \eta_1 - \frac{2}{3}\,\eta_1^3 + \frac{2}{15}\,\eta_1^5 - \cdots$$

und

$$\begin{aligned}\eta_1^3 = &\frac{1}{4}\,\alpha_1^3\,(3 \cos bt + \cos 3\,bt)\\ &+ \frac{3}{4}\,\alpha_1^2\,\alpha_3\,(\cos bt + 2 \cos 3\,bt + \cos 5\,bt)\\ &+ \frac{3}{4}\,\alpha_1\,\alpha_3^2\,(2 \cos bt + \cos 5\,bt + \cos 7\,bt)\\ &+ \frac{1}{4}\,\alpha_3^3\,(3 \cos 3\,bt + \cos 9\,bt)\\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Hieraus entstehen die folgenden Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned}-b^2 A &= -b^2 \alpha_1 + \nu^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\,\alpha_1^3 - \frac{1}{2}\,\alpha_1^2\,\alpha_3 - \alpha_1\,\alpha_3^2 + \cdots\right)\\ 0 &= -9\,b^2 \alpha_3 + \nu^2 \left(\alpha_3 - \frac{1}{6}\,\alpha_1^3 - \alpha_1^2\,\alpha_3 - \frac{1}{2}\,\alpha_3^3 + \cdots\right)\\ &\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{aligned}$$

Es ist wohl kaum zu erwarten, dass man eine strenge Auflösung dieser Gleichungen finden könnte. Um eine Vorstellung von der möglichen Form des Integrales zu erhalten, bemerke ich, dass nach der zweiten Gleichung α_3, für $\nu^2 = b^2$, den genäherten Wert

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1^3}{48\,\nu^2}$$

hat, woraus man findet, dass α_3 sehr klein ist, wenn α_1 einen kleinen Wert hat. Setzt man dementsprechend in der ersten

Gleichung $\alpha_3 = 0$, so erhält man für α_1 die Gleichung

$$\left(\frac{b^2}{\nu^2} - 1\right) \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1^3 = \frac{b^2}{\nu^2} A. \tag{14}$$

Wäre $\nu^2 = b^2$, so würde man hieraus

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2A}$$

erhalten.

Dies ist aber nicht der grösste Wert von α_1, der auftreten kann. Diesen trifft man vielmehr, wenn die Gleichung (14) eine Doppelwurzel besitzt. Schreibt man

$$z = \frac{b^2}{\nu^2},$$

so ist

$$\alpha_1^3 - 2(1 - z)\alpha_1 - 2zA = 0 \tag{15}$$

und diese Gleichung hat eine Doppelwurzel

$$\alpha_1 = -\sqrt[3]{zA},$$

wenn z die Gleichung

$$z^2 A^2 = \frac{8}{27}(1 - z)^3 \tag{16}$$

befriedigt.

Lässt man z von Null bis ∞ variieren, so findet man, dass diese Gleichung eine einzige positive Wurzel besitzt. Diese Wurzel ist zwischen $z = 0$ und $z = +1$ gelegen. Setzt man nämlich

$$f(z) = \frac{8}{27}(z - 1)^3 + z^2 A^2,$$

so findet man, dass $f(0)$ *negativ*, $f(1)$ positiv und $f'(z)$ zwischen $z = 0$ und $z = +\infty$ positiv ist. Es gibt also eine einzige positive Wurzel. Diese Wurzel — die wir mit z_0 bezeichnen — lässt sich nach Potenzen von $A^{2/3}$ entwickeln und zwar bekommt man

$$z_0 = 1 - \frac{3}{2} A^{2/3} + A^{4/3} - \cdots$$

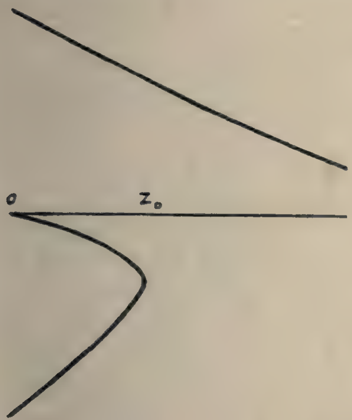
Ist A klein, so ist z_0 nahe gleich der Einheit. Der entsprechende Wert von α_1 ist

$$\alpha_1 = -\sqrt[3]{z_0 A},$$

welche Wurzel doppelt ist. Ausserdem besitzt (15) die einfache Wurzel

$$\alpha_1 = +2\sqrt[3]{z_0 A}.$$

Ist $z > z_0$ hat (15) eine einzige, und zwar positive, Wurzel, die sich für wachsende z dem Werte $\alpha_1 = A$ nähert. Ist $z < z_0$ so hat (15) 3 reelle Wurzeln, von denen eine positiv, die beiden anderen negativ sind. Für $z = 0$ hat man die Wurzeln $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_1 = \pm\sqrt{2}$.



Die periodische Lösung (13*) hat also die merkwürdige Eigenschaft eine diskontinuierliche Funktion des Parameters z zu sein. Fangen wir nämlich mit dem Werte $z = 0$ an, so hat (13) die Lösung $\eta_1 = 0$. Wenn z wächst, so wachsen die Koeffizienten (wenigstens gilt dies von dem ersten Glied in der Reihe (13*)) in der periodischen Lösung, bis wir für $z = z_0$ die Lösung

$$\eta_1 = -\sqrt[3]{z_0 A}\cos bt + \alpha_3 \cos 3bt + \cdots$$

erhalten. Wenn nun $z > z_0$ wird, so haben wir es mit der periodischen Lösung

$$\eta_1 = 2\sqrt[3]{z_0 A}\cos bt + \alpha_3 \cos 3bt + \cdots$$

zu tun, d. h. die Amplitude wird verdoppelt und wechselt das Zeichen.

Die hier behandelten Lösungen haben ihre Anwendung bei dem Studium der Bewegung eines einfachen Pendels, das Störungen unterworfen ist, welche nahe dieselbe Periode besitzen wie die freien Schwingungen des Pendels. Die hier angewandte Methode ist zwar in mathematischer Hinsicht sehr mangelhaft, dürfte aber eine genäherte Aufgabe der Lösung geben.

Es ist für die Theorie der Libration des Mondes von Interesse, die numerischen Beträge der hier behandelten Störungen zu untersuchen. Das Glied in der Mondlänge, das hier in Betracht kommt, ist die sog. jährliche Gleichung, welche nach DELAUNAY die Form

$$-668''.9 \sin \odot$$

hat. Man hat also $A = -668''.9$, oder im Radius ausgedrückt $A = -0.00324$. Wenn die Trägheitsmomente des Mondes solche Werte haben würden, dass die Periode der physischen Libration genau ein Jahr betragen würde, so würde man in η_1 ein Glied erhalten vom Betrage

$$-11^\circ.99 \sin \odot .$$

Im singulären Punkt z_0 springt der Koeffizient dieses Gliedes von $+8^\circ.48$ zu $-16^\circ.96$ über.

Da die Beobachtungen, die man zu verschiedenen Zeiten angestellt hat, um den Wert des Gliedes im Ausdrucke für die Libration des Mondes, das die Periode eines Jahres hat, zu bestimmen, insofern übereinstimmen, dass der Koeffizient dieses Gliedes höchstens einige Bogenminuten betragen kann, so *scheint es also ausgeschlossen zu sein, dass die Periode der physischen Libration die Länge von einem Jahr haben könnte.*

Wir haben bis jetzt nur die partikulare periodische Lösung der Gleichung (13) betrachtet. Um die allgemeine Lösung zu erhalten, müssen wir noch die entsprechenden Variationsgleichungen in Betracht ziehen. Setzt man

$$\eta = \eta_1^0 + \varDelta\eta$$

und verstehen unter η_1^0 die partikulare Lösung von (13), die eine Periode gleich $2\pi : b$ hat, so erhält die Gleichung für $\varDelta\eta$ die Form

$$\frac{d^2 \varDelta\eta}{dt^2} + \nu^2 \cos 2\eta_1^0 \varDelta\eta = 0 .$$

Diese gehört zu den linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, und das Integral ist von der Form

$$\Delta r_1 = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mu_s \cos[w + 2sbt], \tag{17}$$

wo

$$w = \nu(1 - \sigma)t + \pi$$

ist und die Grösse σ genähert den Wert

$$\sigma = \frac{\nu^2 A^4}{b^2\left(\frac{\nu^2}{b^2} - 1\right)^5}$$

hat (man vergleiche meine Vorlesungen über die »Mechanik des Himmels» S. 41). Wenn ν^2 nahe gleich b^2 ist, so ist dieser Ausdruck nicht mehr gültig.

Fügt man zu (17) das partikulare Integral (13*) hinzu, so hat man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (13).

Die partikularen Integrale, die wir hier betrachtet haben, werden zweckmässig als Ausgangslösungen benutzt, wenn man die Rotation des Mondes untersuchen will. Ich habe bei der Untersuchung dieses Problems diesen Weg eingeschlagen und dadurch eine grosse Einfachheit und Übersichtlichkeit in der Behandlung des Problems erreicht.

Ist der rotierende Körper ein Rotationskörper, so dass $A = B$ ist, so besitzt das planetarische Rotationsproblem — vorausgesetzt, dass der störende Körper sich in einem Kreise bewegt — ausser dem Integrale $H' =$ Constans noch ein Integral (nämlich $\alpha_1 =$ Constans). Die Differentialgleichungen können dann auf zwei Freiheitsgrade reduziert werden. Dies findet seine Anwendung in der Theorie der Rotation der Erde. Das Integral $\alpha_1 =$ Constans erlaubt wichtige Schlüsse über die Stabilität der Rotation der Erde zu ziehen.

Tryckt den 28 januari 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

UPPSALA 1908. ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

M7 Feb 21/67